Potentialströmung und Magnuseffekt

(Zusammengefasst und ergänzt nach W. Albring, Angewandte Strömungslehre, Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 3. Aufl. 1966)

Voraussetzungen

Behandelt werden reibungs- und wirbelfreie, zweidimensionale, stationäre Potentialströmungen in der x-y-Ebene. Der umströmte Körper ist in der z-Richtung unendlich ausgedehnt.

Vorausgesetzt wird die Bernoulli-Gleichung für horizontale Strömungen: $\frac{\rho v^2}{2} + p = konst.$ mit konstanter Dichte ρ der Flüssigkeit, v = Strömungsgeschwindigkeit, p = statischer Druck.

Bei einem angeströmten Körper sei v_∞ die Strömungsgeschwindigkeit und p_∞ der statische Druck in grosser Entfernung sowie v und p die entsprechenden Grössen in der Nähe des Körpers, dann ist mit der Bernoulli-Gleichung $\frac{\rho v^2}{2} + p = \frac{\rho v_\infty^2}{2} + p_\infty$. Der Ausdruck $\frac{p-p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \frac{\Delta p}{q} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2$ ist dann bei geometrisch ähnlichen Körpern skaleninvariant und soll *dimensionsloser Druck* heissen.

Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten einen Quader mit den infinitesimalen Kantenlängen dx, dy und dz der von der Flüssigkeit durchströmt wird. Durch die Fläche $dydz$ fliesst pro Sekunde auf der einen Seite die Masse $\rho v_x dydz$, auf der anderen Seite $\rho \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dydz$. Die Differenz ist $\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz$. Für die Fläche $dxdz$ ist die Differenz $\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dxdydz$. Für die Fläche $dxdy$ ist die Differenz null wegen $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (siehe Voraussetzungen). Insgesamt darf sich die Masse innerhalb des Quaders nicht ändern, so dass $\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dxdydz = 0$ ist, woraus folgt:

Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (1)

Rotationsfreiheit

Eine Änderung der x-Geschwindigkeit in y-Richtung entspricht einer lokalen Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Diese muss durch eine entsprechende Änderung der y-Geschwindigkeit in x-Richtung kompensiert werden, um Rotationsfreiheit zu erreichen: $-\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x}$. Daher gilt:

Rotationsfreiheit $\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ (2).

Potenzial- und Stromfunktion

Gleichung (2) wird erfüllt, wenn sich die Geschwindigkeiten aus einer Funktion Φ (Potenzialfunktion oder kurz Potenzial genannt) durch partielle Ableitung berechnen lassen: $v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Damit wird aus (1) die

Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ (3a).

Andererseits kann man sich eine Funktion Ψ vorstellen, für die $v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$ und $v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ gilt, so dass (1) erfüllt ist. Diese Ausdrücke in (2) eingesetzt ergeben dann ebenfalls eine

Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$ (3b).

Um eine anschauliche Vorstellung der beiden Funktionen zu erhalten, kann man sich die Frage stellen, was die Linien mit konstantem Ψ bedeuten. Auf diesen gilt $d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy = 0$, so dass $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$ ist. Das heisst, der Geschwindigkeitsvektor steht tangential zu den $\Psi = \mathrm{konst.}$-Linien. Die Flüssigkeit bewegt sich entlang diesen Linien, die daher Stromlinien heissen.

Analog ergibt sich, dass die Tangente an den $\Phi = \mathrm{konst.}$-Linien senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor steht. Diese Linien heissen Äquipotenziallinien.

Weil beide Funktionen die Laplace-Gleichung erfüllen, kann durch Vertauschen der Funktionen aus einem gültigen Strömungsbild ein zweites gültiges Strömungsbild erhalten werden.

Potentialströmung am Kreiszylinder

Das Potential für einen Kreiszylinder mit Radius R hat die Form $\Phi = v_\infty x\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$.

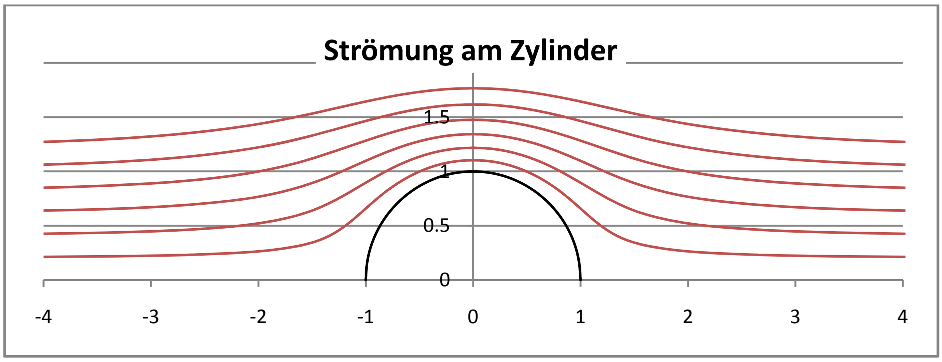
Damit folgt $v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_\infty\left\{1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}R^2\right\}$ und $v_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -v_\infty\frac{2yxR^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Für $(x^2+y^2) \to \infty$ folgt $v_x \to v_\infty$ und $v_y \to 0$.

Die Stromlinienfunktion lautet $\Psi = v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$. Diese kann aus $\Psi = \int c_x dy$ abgeleitet werden.

Die Gleichung $\Psi = konst. = k$ lässt sich leichter nach *x* als nach *y* auflösen: $x = \pm\sqrt{\frac{R^2y+ky^2-y^3}{y-k}}$.

Für $x = 0$ ist $y = \frac{k}{2} + \mathrm{sign}(k)\cdot\sqrt{R^2 + \frac{k^2}{4}} = y_{extr}$. Für positive k und y sind daher Werte im Bereich $k < y \le y_{extr}$ einzusetzen. Das Ergebnis für *k* = 0.2, 0.4,...1.2 sieht so aus (*k* = 0 entspricht dem Kreis):

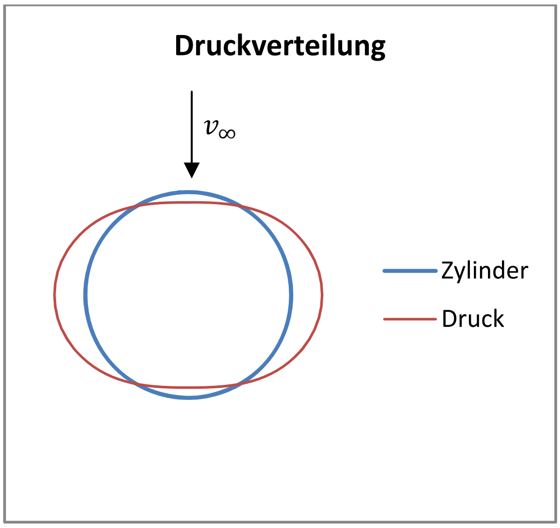


Auf dem Kreisumfang ergeben sich mit $y = R \cdot \sin(\varphi)$ und $x = R \cdot \cos(\varphi)$ die Geschwindigkeiten $v_x = v_\infty(1 + \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)) = 2v_\infty \sin^2(\varphi)$ und $v_y = -2v_\infty \sin(\varphi)\cos(\varphi)$.

Die Gesamtgeschwindigkeit ist $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2v_\infty \sin(\varphi)$. Punkte auf der Körperoberfläche mit der Strömungsgeschwindigkeit null heissen Staupunkte. Diese liegen hier bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$, also bei den Schnittpunktes des Kreises mit der x-Achse.

Für den dimensionslosen Druck ergibt sich $\frac{\Delta p}{q} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = 1 - 4sin^2(\varphi)$.

Die Druckverteilung in einem Polardiagramm (Drucklinie innerhalb des Zylinders entspricht positivem Druck, Drucklinie ausserhalb des Zylinders entspricht "Sog"):



Da die Druckverteilung sowohl zur Achse der Anströmrichtung als auch senkrecht dazu symmetrisch ist, tritt weder ein Strömungswiderstand noch ein Auftrieb auf.

Potenzialwirbel

Wir denken uns eine gerade, fadenförmige Quelle des strömenden Mediums, die senkrecht zur x-y-Ebene durch den Ursprung verläuft. Die Quelle gibt pro Meter Länge und pro Sekunde das Volumen Q ab. Das Medium strömt radial von der Quelle weg. In der Entfernung r strömt das Medium mit der Geschwindigkeit $v(r)$ durch eine Zylinderfläche A. Es muss nun für eine Fadenlänge b gelten (Kontiniutät): $Qb = 2\pi r b v(r)$ oder $v(r) = \frac{Q}{2\pi r}$.

Daraus folgt: $v_x = v(r) \cdot \sin(\varphi) = v(r) \cdot \frac{x}{r} = \frac{Qx}{2\pi r^2} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$ und analog $v_y = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$.

Damit kann das Potenzial berechnet werden, das für alle Punkte ausser dem Ursprung definiert ist: $\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi} \int \frac{x}{x^2+y^2} dx = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Die Äquipotenziallinien sind also Kreise um den Ursprung.

Die Stromfunktion dazu ist $\Psi_Q = -\int v_y dx = -\frac{Q}{2\pi} \int \frac{y}{x^2+y^2} dx = \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Die Stromlinien $\Psi_Q = konst.$ sind also Linien, die radial (mit dem Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ zur x-Achse) durch den Ursprung verlaufen.

[Zwischenbemerkung: Es lässt sich eine entsprechende Senke definieren. Aus der Kombination von ein oder mehreren Quellen und Senken gleicher Stärke und Überlagerung einer Parallelströmung lassen sich Strömungen um diverse Körper (insbesondere auch den Kreiszylinder, aber auch Flügelprofile) baukastenartig zusammensetzen.]

Wir machen nun von der Tatsache Gebrauch, dass die Liniensysteme von Φ und Ψ vertauscht werden dürfen, um eine Strömung zu erhalten, die ebenfalls die Laplace-Gleichung erfüllt. Nun verlaufen also die Äquipotenziallinien radial und die Strömungslinien auf konzentrischen Kreisen. Wir haben es also mit einer Zirkulation um den Ursprung zu tun. Aus der Quellstärke Q wird die Zirkulationsstärke Γ (ebenfalls mit der Einheit m^2/s). Diese ist üblicherweise positiv für Zirkulation im Uhrzeigersinn. Da Winkel im Gegenuhrzeigersinn positiv gemessen werden, ist beim Potential des Wirbels ein Minuszeichen einzuführen:

$\Phi_W = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2n\pi\right\}$ und $\Psi_W = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Es kann leicht gezeigt werden, dass die Strömung (ausser am Ursprung) rotationsfrei ist. Das heisst, ein kleines Brettchen, das auf der Flüssigkeitsoberfläche schwimmt, würde von der Strömung im Kreis getragen, aber dabei nicht um seine eigene Achse gedreht werden. Die Strömungsgeschwindigkeit nimmt umgekehrt proportional zum Abstand ab.

Die Zirkulation ist im Allgemeinen durch $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$, definiert wobei das Integral entlang eines geschlossenen Weges in der x-y-Ebene berechnet wird.

Magnuseffekt

Die Anströmung eines rotierenden Zylinders führt zu einer Kraft, die senkrecht zum Zylinder und zur ungestörten Strömung steht. Im Rahmen der hier gemachten Vereinfachungen kann diese theoretisch hergeleitet werden.

Das Potenzial für diesen Fall ist die Summe der Potenziale für den angeströmten Zylinder (Siehe S. 2) und einer Zirkulationsströmung (siehe oben): $\Phi = v_\infty x\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2n\pi\right\}$.

Die Geschwindigkeitskomponenten auf dem Umfang ergeben sich mit $y = R \cdot \sin(\varphi)$ und $x = R \cdot \cos(\varphi)$ durch Ableiten des Potenzials:

$v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2v_\infty \sin^2(\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = 2v_\infty \sin^2(\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \sin(\varphi)$ und

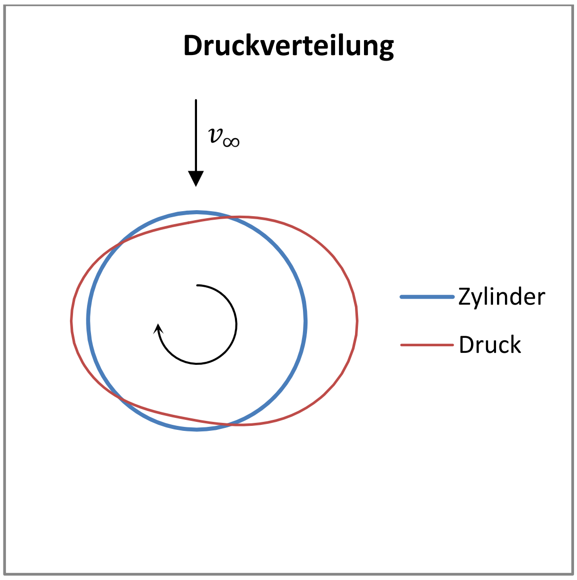
$v_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2v_\infty \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} = -2v_\infty \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \cos(\varphi)$

Die Gesamtgeschwindigkeit auf dem Umfang ist daher: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2v_\infty \sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R}$.

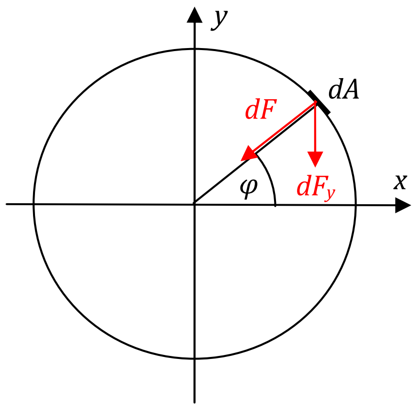
Die Staupunkte ($v = 0$), die für $\Gamma = 0$ bei 0 und 180° liegen, rücken also mit zunehmendem Γ symmetrisch in Richtung 270°. Bei der maximalen Zirkulation Γ_{max} gibt es nur noch einen Staupunkt bei 270°. Aus $2v_\infty \sin(270°) + \frac{\Gamma_{\max}}{2\pi R} = 0$ folgt $\Gamma_{max} = 4\pi R v_\infty$. Damit kann man schreiben:
$v = 2v_\infty\left(\sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{\Gamma_{max}}\right)$.

Für den dimensionslosen Druck ergibt sich $\frac{\Delta p}{q} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = 1 - 4\left(\sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{\Gamma_{max}}\right)^2$.

Die Druckverteilung in einem Polardiagramm für $\frac{\Gamma}{\Gamma_{max}} = 0.2$ (Drucklinie innerhalb des Zylinders entspricht positivem Druck, Drucklinie ausserhalb des Zylinders entspricht "Sog"):



Es ist zu erkennen, dass es eine resultierende Kraft senkrecht zur Anströmrichtung, also einen Auftrieb F_A gibt. Einen Strömungswiderstand gibt es auch hier nicht.



Alle Grössen beziehen sich im Folgenden auf eine Zylinderlänge von 1. Zur Berechnung des Auftriebs integrieren wir die Kräfte dF_y über den gesamten Zylinder (Der Zylinder wird entlang der x-Achse angeströmt). Mit $dA = R \cdot d\varphi$ als Flächenelement ist die Kraft in y-Richtung $dF_y = -pR\sin(\varphi)d\varphi$. Der Druck ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung $p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v^2)$.

Im Integral $F_A = \int_0^{2\pi} dF_y = -R\int_0^{2\pi}\left(p_\infty + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v^2)\right)\sin(\varphi)d\varphi$ ergibt die Integration für die Terme mit konstanten Faktoren vor dem Sinus null. Es bleibt

$F_A = 4Rv_\infty^2\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{\Gamma_{max}}\right)^2\sin(\varphi)d\varphi$.

Dabei sind die Integrale über die ungeraden Potenzen von $\sin(\varphi)$ null und $\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,d\varphi = \pi$, so dass $F_A = 4Rv_\infty^2\frac{\rho}{2}\cdot 2\pi\frac{\Gamma}{\Gamma_{max}}$.

Mit $\Gamma_{max} = 4\pi R v_\infty$ folgt $F_A = \rho v_\infty \Gamma$.

Der maximale Auftrieb ist $F_{A,max} = \rho v_\infty \Gamma_{\max} = 4\pi \cdot \frac{\rho}{2}\, v_\infty^2 \cdot 2R$. Da $2R$ die angeströmte Fläche für einen Zylinder der Länge 1 ist, ist der Auftriebsbeiwert $c_A = 4\pi$. Dieser Wert liegt weit über den mit Flügeln erreichbaren Werten.