

IYPT 2009

Problem Nr. 2.: Coupled compasses

Place a compass on a table. Place a similar compass next to the first one and shake it gently to make the needle start oscillating. The original compass' needle will start oscillating. Observe and explain the behaviour of these coupled oscillators.

1. Physikalische Grundlagen

Eine Kompassnadel, die sich nur um eine vertikale Achse drehen kann, richtet sich entlang der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes $\vec{B}_{E,h}$ aus (magnetischer Meridian). Ihr Nordpol zeigt dabei definitionsgemäss nach Norden. Zeigt die Nadel in eine andere Richtung, übt das Erdmagnetfeld ein Drehmoment auf die Nadel aus, das durch

$$\vec{M}_B = \vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}_{E,h}$$

gegeben ist. Dabei ist $\vec{\mu}_{Dipol}$ das magnetische Dipolmoment der Nadel. Das Drehmoment ist der Winkelauslenkung φ aus der Gleichgewichtslage entgegengesetzt und proportional zu $\sin \varphi$. Eine Nadel allein führt daher im Magnetfeld der Erde eine (für kleine Drehwinkel näherungsweise harmonische) Schwingung aus.

Für zwei benachbarte Magnetnadeln kommt nun noch die Wirkung des Magnetfeldes der jeweils anderen Nadel hinzu. Dieses ist aber keineswegs homogen. Daher wird für die Wechselwirkung der Nadeln untereinander folgende Näherung eingeführt: Die Nadeln werden als Dipole mit punktförmigen Kraftzentren (Polen) in der Nähe der Nadelspitzen angesehen. Für kleine Ausschläge der Nadeln wird nur die Wechselwirkung der jeweils nächsten Pole berücksichtigt. Diese Sichtweise wird durch den Verlauf der Magnetfeldlinien zwischen den benachbarten Spitzen der beiden Nadeln gerechtfertigt (siehe Abb. 1). Die Feldlinien verlaufen dort ähnlich zu den Feldlinien zweier „magnetischer Monopole“. Die ungefähre Lage dieser Pole ist im Foto mit roten Kreisen markiert. Die Wechselwirkung mit den jeweils weiter entfernt liegenden Polen kann vernachlässigt werden.

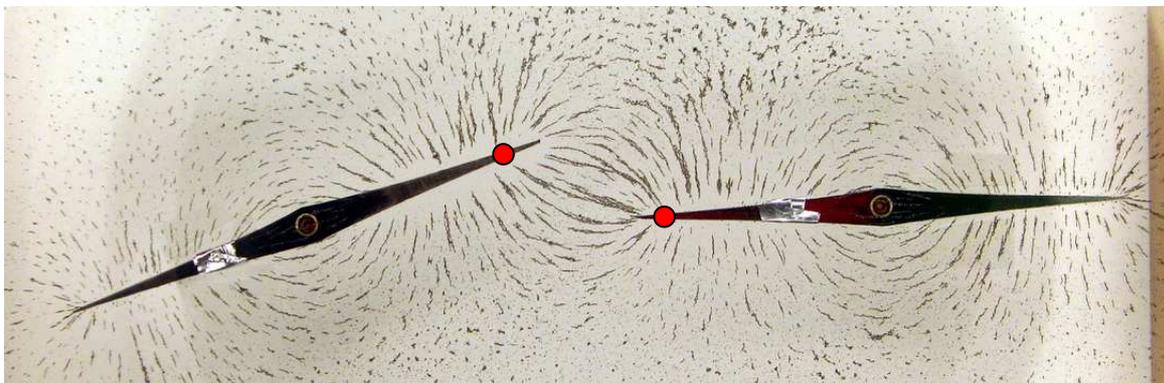


Abb. 1

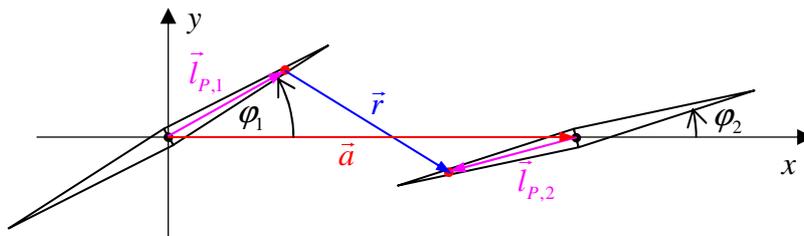


Abb. 2

Abb. 2 zeigt die geometrische Situation. Es gilt:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{l}_{P,2} - \vec{l}_{P,1} = \begin{pmatrix} a - l_p \cos \varphi_2 - l_p \cos \varphi_1 \\ -l_p \sin \varphi_2 - l_p \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Wie schon Ch. A. Coulomb feststellte, gilt unter den genannten Umständen für die Kraft zwischen den beiden Polen mit Abstand r ein zu elektrischen Ladungen analoges Gesetz (siehe auch [Ber 71, S.98]):

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Dabei ist p die Polstärke (gelegentlich auch als „magnetische Ladung“ bezeichnet). Diese Kraft führt bei beiden Nadeln ($i = 1,2$) zu einem zusätzlichen Drehmoment

$\vec{M}_{M,i} = \vec{l}_{P,i} \times \vec{F}_{M,i}$, wobei $\vec{l}_{P,i}$ der Vektor von der Drehachse der jeweiligen Nadel zum Pol ist und $\vec{F}_{M,1} = -\vec{F}_{M,2}$ gilt.

Das Gesamtdrehmoment für eine Nadel ist die Summe der beiden Drehmomente:

$$\vec{M} = \vec{M}_B + \vec{M}_M.$$

Das Drehmoment bestimmt die zeitliche Ableitung des Drehimpulses \vec{L} gemäss $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$.

Ausserdem gilt $\vec{L} = J\vec{\omega} = J\dot{\vec{\varphi}}$ (J = Trägheitsmoment).

In allen Fällen kann mit Beträgen gerechnet werden, da die Drehachse fest ist. Es gilt dann für identische Nadeln, deren Drehachsen auf dem gleichen magnetischen Meridian stehen:

$$M_i = l_p \cos \varphi_i F_y - l_p \sin \varphi_i F_x - B_{E,h} \mu_{Dipol} \sin \varphi_i = \frac{l_p r_y p^2}{4\pi\mu_0 r^3} \cos \varphi_i - \frac{l_p r_x p^2}{4\pi\mu_0 r^3} \sin \varphi_i - B_{E,h} \mu_{Dipol} \sin \varphi_i$$

Der Abstand der Pole r ist oben als Funktion der Grösse l_p , den beiden Drehwinkeln φ_i und dem Abstand a der Drehachsen der beiden Nadeln angegeben. Die Bewegungsgleichungen der beiden Nadeln sind dadurch in komplizierter Weise gekoppelt.

2. Messungen und Beobachtungen

Zwei Nadeln gleicher Abmessungen (Länge von Spitze zu Spitze 100 mm, Gesamtmasse 2.0 g) werden mit einem Permanentmagneten magnetisiert. Sie zeigen bei kleinen Ausschlägen ($< 30^\circ$) im Erdmagnetfeld jeweils allein nahezu identische Schwingungsdauern von (2.52 ± 0.05) s. Ihr Trägheitsmoment wird aus den mechanischen Abmessungen und Massen der Bestandteile zu etwa $6.6 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bestimmt (siehe Anhang 2).

Die Bewegungen der Nadeln wurden für verschiedene Anfangswinkel und verschiedene Abstände der Drehachsen mit Video aufgenommen. In allen Fällen waren die maximalen Drehwinkel unter 30° . Spezielle Bedingungen führen zu „symmetrischen“ Schwingungen

(Anfangswinkel $\varphi_{1,0} = -\varphi_{2,0}$) bzw. zu „antisymmetrischen“ Schwingungen (Anfangswinkel $\varphi_{1,0} = \varphi_{2,0}$). Diese Schwingungen sind nicht harmonisch, denn in beiden Spezialfällen war zu beobachten, dass die Schwingungsdauer mit abnehmender Amplitude deutlich abnahm.

In einem asymmetrischen Fall (Startwinkel $\varphi_{1,0} = 0^\circ$ und $\varphi_{2,0} = 30^\circ$, sowie Abstand $a = 110 \text{ mm}$) wurden die Funktionen $\varphi_i(t)$ aus Videoaufnahmen mit 30 Bildern/s bestimmt. Dabei wurden die Winkel in jedem der Einzelbilder (siehe Abb. 3) abgelesen. In Abb. 4 ist das Ergebnis dargestellt (Es ist $-\varphi_2$ dargestellt. Dadurch entspricht ein grosser Unterschied der Kurven auch einem grossen Abstand der Nadelspitzen.)

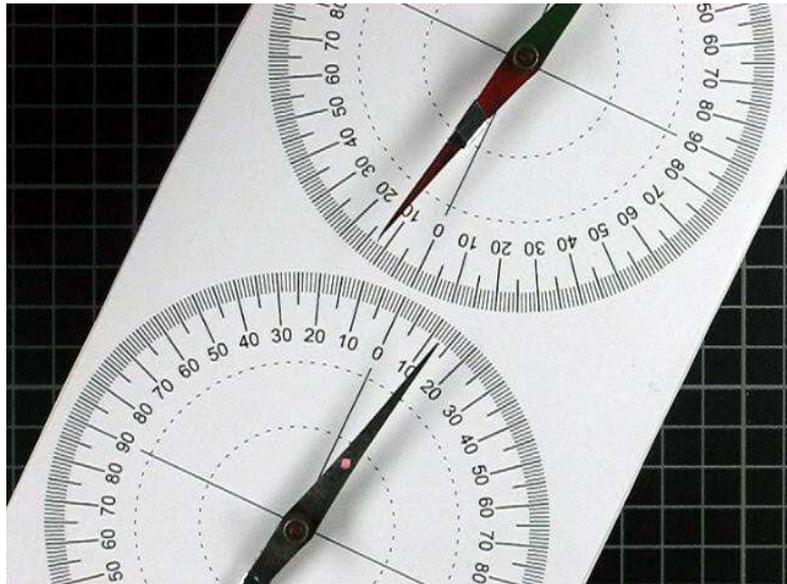


Abb. 3

Coupled Compasses Messungen $a = 11 \text{ cm}$ (Greutz)

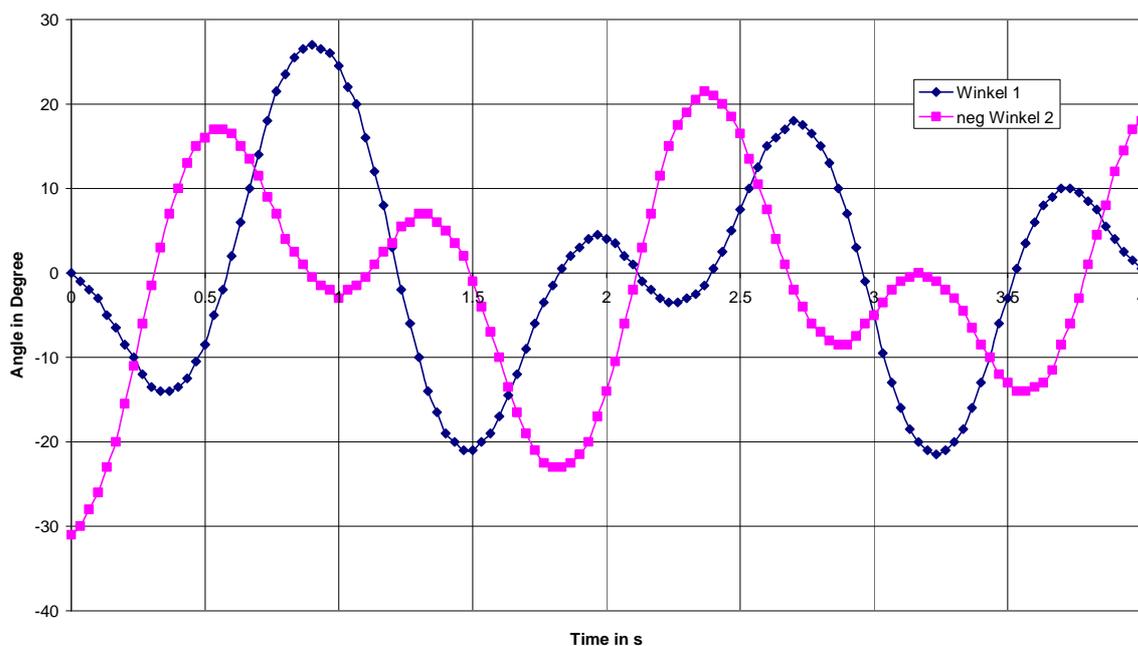


Abb. 4

3. Numerische Lösung der Differentialgleichungen

Die Funktionen $\varphi_i(t)$ sollen numerisch bestimmt werden. Dazu wird das Standardprogramm Stella eingesetzt. Die beiden Nadeln stehen im Abstand a auf dem gleichen magnetischen Meridian. Die Reibung wird heuristisch durch ein zum Drehimpuls proportionales, negatives Drehmoment berücksichtigt.

Für die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes wird der Wert $21 \cdot 10^{-6}$ T angenommen. Das magnetische Dipolmoment der Nadeln wird aus einem einfachen Modell für eine Nadel durch Anpassung an den gemessene Schwingungsdauer zu 0.2 Nm/T bestimmt. Das Modell der gekoppelten Nadeln (dargestellt im Anhang) basiert auf den oben dargelegten physikalischen Zusammenhängen. Es werden die Polstärke p , der Polradius l_p und die Reibungszahl so angepasst, dass gemessene und berechnete Daten möglichst gut zusammenpassen (siehe Abb. 5). Alle Parameter können im Anhang aus der Liste der Gleichungen in SI-Einheiten abgelesen werden.

Die weitgehende Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung für die ersten 4 Sekunden der Bewegung ist offensichtlich. Das Modell beschreibt die Beobachtungen in diesem Fall recht gut.

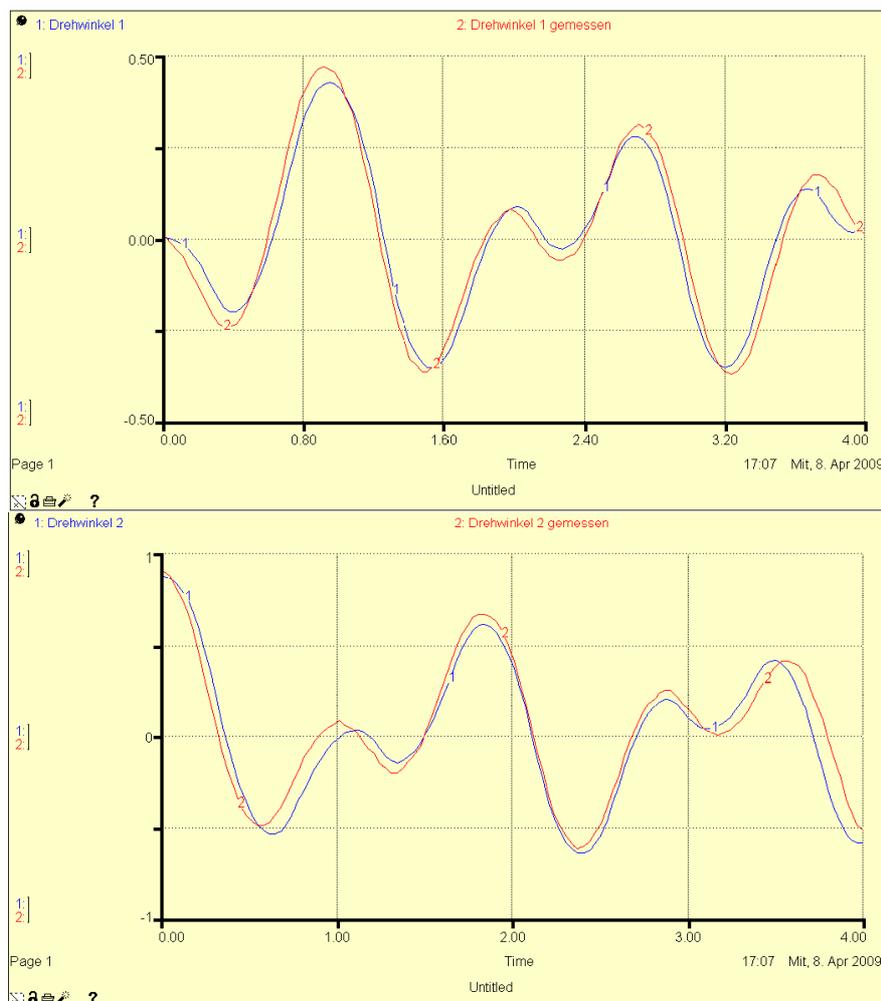
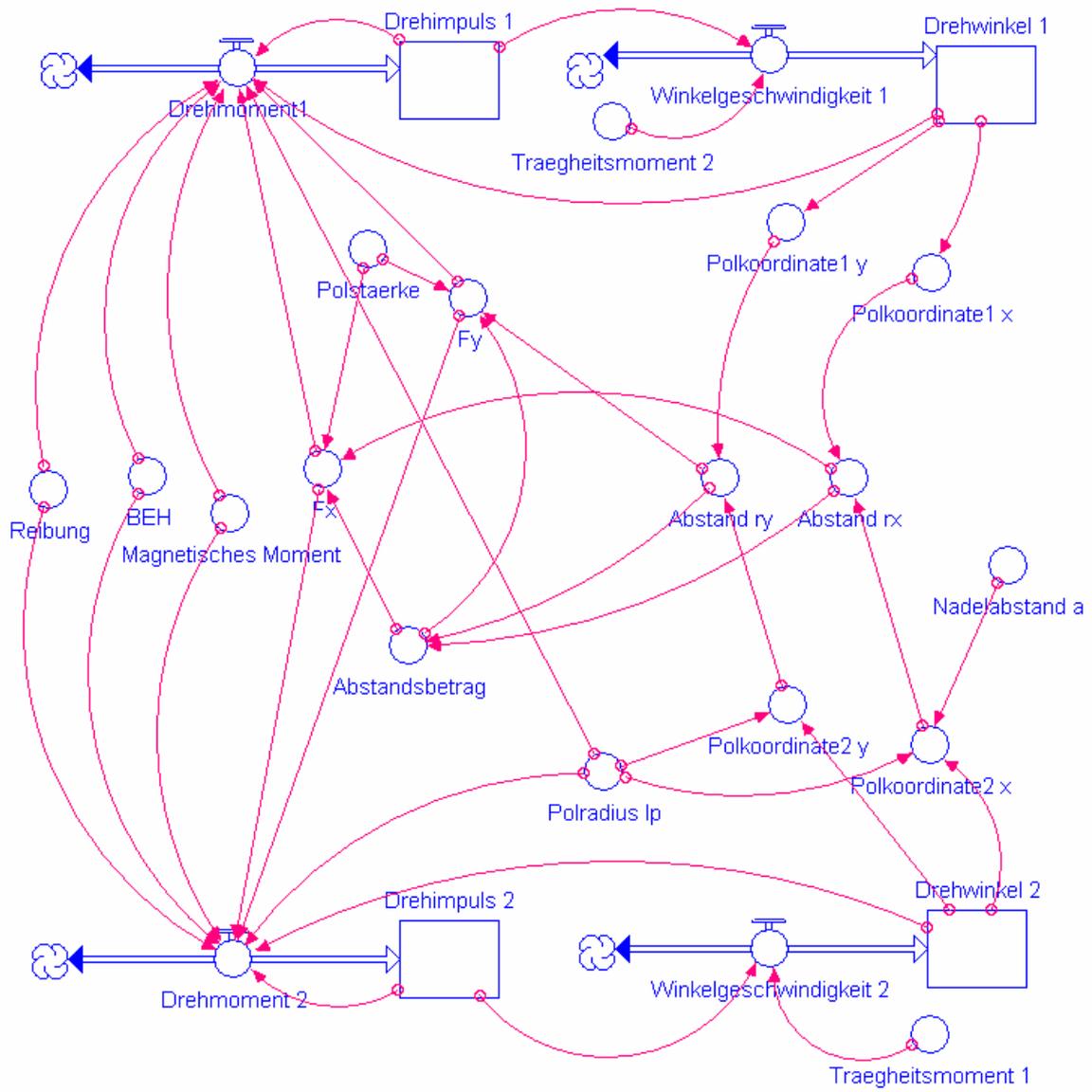


Abb. 5

Quellen

[Ber 71] Bergmann Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band II Elektrizität und Magnetismus, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 6. Aufl., 1971

Anhang 1: Das Stella-Modell



Equations:

$$\text{Drehimpuls}_1(t) = \text{Drehimpuls}_1(t - dt) + (\text{Drehmoment}_1) * dt$$

$$\text{INIT Drehimpuls}_1 = 0$$

INFLOWS:

$$\text{Drehmoment}_1 = \text{Polradius}_{lp} * \text{COS}(\text{Drehwinkel}_1) * F_y -$$

$$\text{Polradius}_{lp} * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_1) * F_x - \text{BEH} * \text{Magnetisches_Moment} * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_1) -$$

$$\text{Reibung} * \text{Drehimpuls}_1$$

$$\text{Drehimpuls}_2(t) = \text{Drehimpuls}_2(t - dt) + (\text{Drehmoment}_2) * dt$$

$$\text{INIT Drehimpuls}_2 = 0$$

INFLOWS:

$$\text{Drehmoment}_2 = \text{Polradius}_{lp} * \text{COS}(\text{Drehwinkel}_2) * F_y -$$

$$\text{Polradius}_{lp} * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_2) * F_x - \text{BEH} * \text{Magnetisches_Moment} * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_2) -$$

$$\text{Reibung} * \text{Drehimpuls}_2$$

$$\text{Drehwinkel}_1(t) = \text{Drehwinkel}_1(t - dt) + (\text{Winkelgeschwindigkeit}_1) * dt$$

$$\text{INIT Drehwinkel}_1 = 0$$

INFLOWS:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit}_1 = \text{Drehimpuls}_1 / \text{Traagheitsmoment}_2$$

$$\text{Drehwinkel}_2(t) = \text{Drehwinkel}_2(t - dt) + (\text{Winkelgeschwindigkeit}_2) * dt$$

$$\text{INIT Drehwinkel}_2 = 30/180 * \text{Pi}$$

INFLOWS:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit}_2 = \text{Drehimpuls}_2 / \text{Traagheitsmoment}_1$$

$$\text{Abstand}_{rx} = \text{Polkoordinate}_{2_x} - \text{Polkoordinate}_{1_x}$$

$$\text{Abstand}_{ry} = \text{Polkoordinate}_{2_y} - \text{Polkoordinate}_{1_y}$$

$$\text{Abstandsbeitrag} = \text{SQRT}(\text{Abstand}_{rx}^2 + \text{Abstand}_{ry}^2)$$

$$\text{BEH} = 21\text{E-}6$$

$$F_x = 1 / ((4 * \text{PI})^2 * 1\text{E-}7) * \text{Polstaerke}^2 / \text{Abstandsbeitrag}^3 * \text{Abstand}_{rx}$$

$$F_y = 1 / ((4 * \text{PI})^2 * 1\text{E-}7) * \text{Polstaerke}^2 / \text{Abstandsbeitrag}^3 * \text{Abstand}_{ry}$$

$$\text{Magnetisches_Moment} = 0.2$$

$$\text{Nadelabstand}_a = 0.11$$

$$\text{Polkoordinate}_{1_x} = 0.05 * \text{COS}(\text{Drehwinkel}_1)$$

$$\text{Polkoordinate}_{1_y} = 0.05 * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_1)$$

$$\text{Polkoordinate}_{2_x} = \text{Nadelabstand}_a - \text{Polradius}_{lp} * \text{COS}(\text{Drehwinkel}_2)$$

$$\text{Polkoordinate}_{2_y} = -\text{Polradius}_{lp} * \text{SIN}(\text{Drehwinkel}_2)$$

$$\text{Polradius}_{lp} = 0.045$$

$$\text{Polstaerke} = 1.0\text{E-}6$$

$$\text{Reibung} = 0.14$$

$$\text{Traagheitsmoment}_1 = 6\text{E-}7$$

$$\text{Traagheitsmoment}_2 = 6\text{E-}7$$

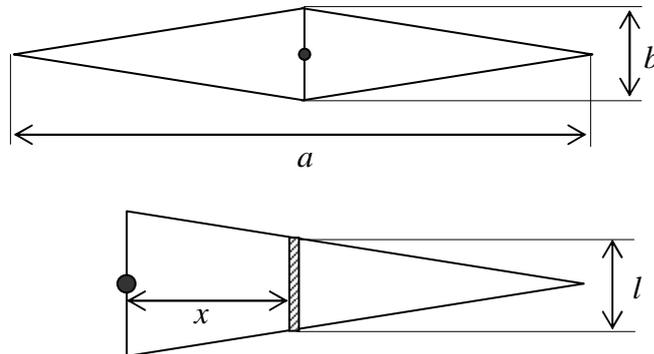
Anhang 2: Berechnung des Trägheitsmoments der Kompassnadel

Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes:

Die Fläche wird in Streifen der Länge l und der infinitesimalen Breite dx zerlegt. Der Abstand des Streifens zu Drehachse sei x .

Mit m = Masse der Nadel
ist die Masse des Streifens:

$$dm = \frac{2m}{ab} l dx .$$



Sein Trägheitsmoment ist mit dem bekannten Ausdruck für das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes und dem Satz von Steiner:

$$dJ = \frac{1}{12} \frac{2m}{ab} l^3 dx + \frac{2m}{ab} l x^2 dx \quad (1)$$

Dabei gilt nach Strahlensatz folgende Beziehung: $l = b \frac{a-2x}{a}$. Damit wird (1) zu

$$dJ = \frac{1}{6} \frac{m}{a} b^2 \left(\frac{a-2x}{a} \right)^3 dx + \frac{2m}{a} \frac{a-2x}{a} x^2 dx$$

Die Integration liefert das Trägheitsmoment der Nadel:

$$J = 2 \int_0^{a/2} dJ = \frac{1}{3} \frac{mb^2}{a^4} \int_0^{a/2} (a-2x)^3 dx + \frac{4m}{a^2} \int_0^{a/2} (ax^2 - 2x^3) dx$$

$$J = \frac{1}{3} \frac{mb^2}{a^4} \frac{a^4}{8} + \frac{4m}{a^2} \frac{a^4}{96} = \frac{1}{24} mb^2 + \frac{1}{24} ma^2 = \frac{1}{24} m(a^2 + b^2)$$

Die Nadel setzt sich aus einem Eisenblech mit den Abmessungen $a = 0.100$ m und $b = 0.0080$ m und einer zylinderförmigen Halterung aus Messing und Saphir (?) zusammen. Letztere hat einen Durchmesser von 0.005 m und wird im folgenden vernachlässigt.

Das Eisenblech mit einer Dicke von 0.50 mm hat eine aus der Dichte berechnete Masse von 1.6 g (die gesamte Nadel wiegt 2.0 g). Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment der Wert $J = 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Dieser wurde im Modell noch geringfügig angepasst.